Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2010
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Première épreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Le corps des nombres réels est noté $\mathbf{R}$. Pour un intervalle I de $\mathbf{R}$, on note I^2 le produit cartésien $I \times I$. On rappelle qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite *convexe* si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad \text{pour tous } t \in [0,1] \text{ et } (x,y) \in I^2.$$

On rappelle également que si une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est deux fois dérivable sur I alors f est convexe si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (ici, f'' désigne la fonction dérivée seconde de f). Pour une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ vérifiant $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$, on définit la fonction $\ln f : I \to \mathbf{R}$ en posant

$$(\ln f)(x) = \ln(f(x)), \quad \text{pour tout } x \in I,$$

où ln désigne la fonction logarithme néperien. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite *logarithmiquement convexe* si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et $\ln f$ est convexe.

On dit qu'une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ est *solution du problème* $(*)$ si elle vérifie les trois conditions suivantes.

$$\begin{cases} (1) & f \text{ est logarithmiquement convexe.} \\ (2) & f(x+1) = xf(x), \quad \text{pour tout } x \in]0, +\infty[. \\ (3) & f(1) = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

Noter au passage que la condition (1) du problème $(*)$ entraîne en particulier que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

L'objectif essentiel de ce sujet est de montrer que le problème $(*)$ admet une et une seule solution et de donner une expression de cette solution sous la forme d'une fonction définie par une intégrale.

1/ Un exemple

Soit $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\varphi(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-xt}\varphi(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On définit une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\varphi(t)\,dt$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

1.1. Montrer que, pour $a \in]0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-at}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

1.2. Montrer que f est de classe C^2.

1.3. Etablir $f'(x)^2 \leq f''(x) f(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

1.4. En déduire que f est logarithmiquement convexe.

2/ Quelques propriétés des fonctions convexes

On rappelle que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que la *somme* et le *produit* de deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont également deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (fg)(x) = f(x)\,g(x), \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

2.1. Montrer que si f et g sont convexes alors $f+g$ est convexe.

2.2. En déduire que si f et g sont logarithmiquement convexes alors fg est logarithmiquement convexe.

2.3. Est-ce que le produit de deux fonctions convexes est nécessairement convexe?

2.4. Montrer que si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$ alors f est logarithmiquement convexe si, et seulement si, $f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t f(y)^{1-t}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in I^2$.

2.5. Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \ln(1+e^x)$ est convexe.

2.6. En déduire que $1 + a^t b^{1-t} \leq (1+a)^t (1+b)^{1-t}$ pour tous $t \in [0,1]$ et $a, b \in]0,+\infty[$.

2.7. Prouver que si f et g sont logarithmiquement convexes alors $f+g$ est logarithmiquement convexe.

2.8. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers f. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est convexe alors f est convexe.

2.9. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur I vers f et que $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est logarithmiquement convexe, alors f est logarithmiquement convexe.

2.10. Soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Déterminer le réel $t \in]0,1[$ tel que $y = tx + (1-t)z$.

2.11. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) Si $x, y, z \in I$ et $x < y < z$ alors

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

(iii) Si $x, y, z \in I$ et $x < y < z$ alors $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{pmatrix} \geq 0$.

3/ Existence et unicité de la solution de (*)

On définit une suite de fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant, pour $x\in]0,+\infty[$,

$$u_0(x)=u_1(x)=0 \quad \text{et} \quad u_n(x)=x\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\ln(x+n-1)+\ln(n-1) \text{ pour } n\geq 2.$$

3.1. Soient $x\in]0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. Etablir

$$u_n(x)=(1-x)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x-1}{n}\right).$$

3.2. En déduire que si $x\in]0,+\infty[$ alors

$$u_n(x)=\frac{x(x-1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n\to+\infty).$$

3.3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

On définit une fonction $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par

$$f(x)=-\ln x+\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x), \quad \text{pour tout } x\in]0,+\infty[.$$

3.4. Calculer $f(1)$.

3.5. Montrer que f est convexe.

3.6. Montrer que si $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$ et $x\in]0,+\infty[$ alors

$$u_n(x+1)-u_{n+1}(x)=x\left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right).$$

3.7. En déduire que la fonction $\exp f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $(\exp f)(x)=e^{f(x)}$ pour $x\in]0,+\infty[$ est une solution du problème (*).

On vient de montrer que (*) admet une solution. La suite de cette partie à pour objectif de montrer que cette solution est unique. Soient h une solution de (*) et $g=\ln h$. On se donne $x\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$.

3.8. Montrer que

$$g(n)-g(n-1)\leq\frac{g(x+n)-g(n)}{x}\leq g(n+1)-g(n).$$

3.9. En déduire $x\ln(n-1)\leq g(x+n)-g(x)\leq x\ln(n)$.

3.10. Etablir $g(x+n)=g(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\ln(x+k)$.

3.11. En déduire que $g(x+n)-g(n)=g(x)+\ln x+\sum_{k=1}^{n-1}(\ln(x+k)-\ln k)$.

3.12. Calculer la somme $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{k-1}\right)$.

3.13. Etablir $0\leq -\ln x+\sum_{k=2}^{n}u_k(x)-g(x)\leq x\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

3.14. Conclure.

4/ Une expression de la solution de (*)

On considère une fonction $\varphi :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes.

(a) $\varphi(x,y) > 0$ pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

(b) Pour tout $y \in]0,+\infty[$, la fonction $u_y :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_y(x) = \varphi(x,y), \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[$$

est logarithmiquement convexe.

(c) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $v_x :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$v_x(y) = \varphi(x,y), \quad \text{pour tout } y \in]0,+\infty[$$

est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut donc définir une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(x,y)\,dy, \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[.$$

4.1. Déterminer $\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left]\frac{1}{n}, n\right[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on définit une fonction f_n de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \int_{1/n}^{n} \varphi(x,y)\,dy, \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[.$$

De plus, si $m \in \mathbb{N}$ et $m > 0$ alors on introduit une fonction $f_{n,m} :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ en posant

$$f_{n,m}(x) = \frac{n^2-1}{nm} \sum_{k=0}^{m-1} \varphi\left(x, \frac{1}{n} + k\frac{n^2-1}{nm}\right), \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[.$$

4.2. Prouver que, si $n \geq 2$, la suite de fonctions $(f_{n,m})_{m\geq 1}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers f_n.

4.3. En déduire que, pour $n \geq 2$, la fonction f_n est logarithmiquement convexe.

4.4. Montrer que f est logarithmiquement convexe.

Dans la suite de cette partie, on définit une fonction $\psi :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\psi(x,y) = y^{x-1}e^{-y}, \quad \text{pour tout } (x,y) \in]0,+\infty[^2.$$

4.5. Montrer que ψ vérifie les conditons (a), (b) et (c) ci-dessus.

4.6. On définit la fonction $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \psi(x,y)\,dy, \quad \text{pour tout } x \in]0,+\infty[.$$

Montrer que Γ est l'unique solution du problème (*).

Fin de l'épreuve

Les nouveaux célibataires

En France, aujourd'hui, 9 millions d'individus vivent seuls. Une personne sur trois - à l'âge où les autres sont à deux - est en tête-à-tête avec elle-même. Mais observer ces solitaires comme une population à part, comme un noyau d'irréductibles construisant vaille que vaille, en parallèle des couples, une alternative définitive au bonheur à deux serait une erreur de lecture. Au jeu des chaises musicales de l'amour, celui qui reste en rade* n'est jamais le même à chaque tour. La figure du vieux garçon ou de l'éternelle incasable n'existe plus : la proportion d'individus restant célibataires à vie est devenue marginale. Mais la solitude, statistiquement, concerne de plus en plus de gens à un moment ou à un autre de leur existence. [...]

« Dans les années 60, il n'y a encore qu'un modèle d'union possible : un mariage pour la vie, c'est assez simple, explique le sociologue Louis Roussel. Puis le divorce, qui à partir de 1975 peut être prononcé par consentement mutuel, augmente de 10 à 40 % en quelques années, l'union libre s'impose, la fécondité est maîtrisée, les femmes se mettent à travailler et acquièrent leur indépendance financière. Ces changements sont extrêmement rapides. Et toutes les nouvelles pièces de ce puzzle assemblées donnent la réalité que nous mesurons aujourd'hui : l'union de deux personnes ne relève plus de la sphère publique, mais de l'ordre strictement privé. Voilà la révolution : que ce soit au sein du mariage ou de l'union libre, c'est au couple de définir sa propre loi. » [...]

Tiraillé entre le rêve d'un destin commun et l'exigence de l'épanouissement individuel, ployant sous le poids des espoirs que chacun met en lui tout en ayant la liberté d'y mettre fin, le couple implose littéralement, se brise et se recompose à l'infini. [...] Et les 9 millions de « solos » que l'on chiffre aujourd'hui, qu'ils soient divorcés, séparés ou célibataires, ne sont finalement que les acteurs, à un moment donné, de l'un des épisodes de cette histoire morcelée : le temps de la solitude.

Mais si les moeurs ont évolué dans les faits à toute allure, notre société judéo-chrétienne est encore travaillée par la nostalgie de ses vieux modèles. [...] Le couple ne dure plus. Mais il continue à être un modèle, un signe extérieur de réussite, d'épanouissement. Et pour ceux qui passent par la case solitude, ce décalage social est aussi un hiatus* intime : on se défie du couple, on s'en libère, mais on en rêve tout de même. [...]

Comment expliquer autrement le succès phénoménal de ces nouveaux modes de rencontres venus d'outre-Atlantique, les séances de "speed-datings"* ou de "blind-dates"* qui fleurissent un peu partout dans nos villes ? Comment analyser le nombre grandissant de clubs de solos, de foires de célibataires, de sites de rencontres [...] Que dire encore de ces séances très tendance* de rencontres à l'américaine où des stakhanovistes* du rendez-vous amoureux enchaînent en quelques heures quinze entretiens avec l'autre sexe ? « Les gens se mettent à chercher l'amour comme ils chercheraient un emploi, explique Georges Alcaraz. Sans doute est-ce un signe d'angoisse, mais ils ont à l'esprit un tas d'idées préconçues sur ce que doit être un couple ou une histoire d'amour. [...]

Au carrefour de la solitude, les 9 millions de futurs amants sont à cran*. Ils ont troqué leurs sueurs froides sentimentales contre un bilan chez un professionnel, ils ont fait le compte de leurs erreurs passées, calculé leur pourcentage de réussite à venir, mesuré leur indice de séduction et mis de l'ordre dans leurs fantasmes. Ils sont « prêts » à rencontrer l'autre. On leur murmurerait bien que des siècles de mythologie amoureuse les contemplent et les contredisent, et que si Yseult* s'était dite «prête» à rencontrer Tristan*, les deux amants maudits se seraient sans doute croisés sans se voir. Mais on leur dira plutôt que la roue tourne et qu'ils ont toutes les chances de se remettre un jour ou l'autre à l'apprentissage périlleux du couple. Les chiffres le disent. Et ça, ce n'est pas de la littérature.

Violaine de Montclos, *Le Point*, 16 mai 2004

* *en rade : exclu*
* *speed-datings : soirées de rendez-vous minutés et successifs avec des inconnus*
* *blind-dates : rendez-vous avec un inconnu*
* *tendance : à la mode*
* *stakhanovistes : travailleurs forcenés*
* *hiatus : décalage*
* *à cran : extrêmement tendus*
* *Tristan et Yseult : couple d'amoureux de la littérature médiévale*

Questions

Sauf indication contraire, vous répondrez à chacune des questions *avec vos propres mots*, sans recopier le texte original

1. *L'auteur de ce texte cherche à : (1 point)*

   - ☐ *critiquer une évolution sociale.*
   - ☐ *analyser un phénomène de société.*
   - ☐ *alerter l'opinion sur un problème social.*

2. *Quelle était la norme du couple jusqu'aux années soixante, selon le sociologue L. Roussel ? (1 point)*

.....

.....

.....

3. *Citez trois des changements qui ont causé la révolution de la vie de couple. (3 points)*

.....

.....

.....

.....

4. *Pourquoi, d'après le texte, le couple actuel n'est pas un couple stable ? (1 point)*

.....

.....

.....

.....

5. *Quelle est l'attitude des personnes seules par rapport au couple ? (2 points)*

.....

6. *Pourquoi les nouveaux modes de rencontre venus de l'étranger suscitent la méfiance des célibataires.* (3 points)

7. *Dans le paragraphe final, que pense la journaliste des mesures employées par les chercheurs de couple ?* (3 points)

Langue :

1. **Complétez le tableau suivant : (1,5point)**

adjectifs	Noms
Tiraillé	
Périlleux	
solitaires	

2. **Remplacez les mots soulignés par « bien que » et réécrivez la phrase en opérant les transformations nécessaires (2points)**

Mais si les mœurs ont évolué, notre société judéo-chrétienne est encore travaillée par la nostalgie de ses vieux modèles

.....

.....

[...] Le couple ne dure plus. Mais il apparait comme un modèle,

.....

.....

3. **« Les gens se mettent à chercher l'amour comme ils chercheraient un emploi, explique Georges Alcaraz. Sans doute est-ce un signe d'angoisse, mais ils ont à l'esprit un tas d'idées préconçues sur ce que doit être un couple ou une histoire d'amour. [...] »**

Réécrivez la phrase en commençant comme suit et opérez les modifications nécessaires (2,5points)

Georges Alcaraz expliquait

.....

.....

.....

.....

.....

Essai :

En France, les célibataires sont de plus en plus nombreux à faire appel aux clubs, aux sites Internet et aux nouveaux modes de rencontre. Que pensez-vous de cette manière de chercher le/la partenaire idéal(e) ? Présentez votre point de vue de façon argumentée *(200 mots environ)*

.....

.....

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2010
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Deuxième épreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. La $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ est notée $\mathbb{C}[X]$. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{C}$. La $\mathbb{C}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ est notée $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à n lignes, à une colonne et à coefficients dans $\mathbb{C}$. La matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n. Le produit de deux matrices A et B est noté $A \cdot B$. On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ou de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En outre, pour une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *comatrice* s'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \mathrm{com}(B)$. On rappelle les relations

$$ {}^tA \cdot \mathrm{com}(A) = \mathrm{com}(A) \cdot {}^tA = \det(A) I_n \qquad (A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})). \tag{$*$}$$

On note $P_A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, soit,

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Le rang d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathrm{rg}(A)$ et sa trace est notée $\mathrm{tr}(A)$. Dans la suite, on confond souvent une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. De ce fait, on note $\ker(A)$ le noyau de A et $\mathrm{Im}(A)$ son image.

L'objectif essentiel de ce problème est de caractériser les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices. Plus précisément, on se propose de montrer qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une comatrice si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) \in \{0, 1, n\}$. La preuve proposée dans cette épreuve est basée en grande partie sur les relations $(*)$ rappelées ci-dessus.

1/ Le cas du plan

1.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer $\mathrm{com}(A)$.

1.2. Vérifier que toute matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est une comatrice.

1.3. Déterminer les matrices $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A = \mathrm{com}(A)$.

D'ici jusqu'à la fin du problème, on suppose que $n \geq 3$.

2/ Rang d'une comatrice

Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

2.1. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 0$.

2.2. Montrer que si $\mathrm{rg}(A) = n$ alors $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\mathrm{rg}(A) = n-1$.

2.3. Montrer que $\ker({}^tA)$ contient $\mathrm{Im}(\mathrm{com}(A))$.

2.4. En déduire que $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1$.

3/ Cas d'une matrice nulle ou inversible

3.1. Vérifier que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{rg}(A) = 0$ alors A est une comatrice.

Dans la suite de cette partie, on considère une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = n$.

3.2. Déterminer $\det(\mathrm{com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.

3.3. Etablir la relation

$$A = \frac{1}{(\det(A))^{n-2}} \mathrm{com}(\mathrm{com}(A)).$$

3.4. Justifier la formule

$$\mathrm{com}(zA) = z^{n-1}\mathrm{com}(A), \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

3.5. En déduire que A est une comatrice.

4/ Une preuve du théorème de Cayley-Hamilton

4.1. Soient P une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, m un entier naturel et $A_0, \ldots, A_m \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$P(z) = A_0 + zA_1 + \cdots + z^m A_m, \qquad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que si le cardinal de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ P(z) = 0\}$ est strictement supérieur à m alors $P(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Tunis
Ecole Normale Supérieure

Session 2010
du
Concours d'Entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Filière MP

Deuxième épreuve de mathématiques

4 Pages Durée: 4 heures

La qualité de la rédaction, le soin de la présentation et la rigueur des raisonnements constituront un élément important pour l'appréciation des copies. L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est strictement interdit.

Le corps des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. La $\mathbb{C}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ est notée $\mathbb{C}[X]$. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathbb{C}^n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{C}$. La $\mathbb{C}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$ est notée $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à n lignes, à une colonne et à coefficients dans $\mathbb{C}$. La matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n. Le produit de deux matrices A et B est noté $A \cdot B$. On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ou de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En outre, pour une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{com}(A)$ la matrice des cofacteurs de A. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *comatrice* s'il existe une matrice $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \mathrm{com}(B)$. On rappelle les relations

$$ {}^tA \cdot \mathrm{com}(A) = \mathrm{com}(A) \cdot {}^tA = \det(A) I_n \qquad (A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})). \tag{$*$}$$

On note $P_A \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, soit,

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Le rang d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathrm{rg}(A)$ et sa trace est notée $\mathrm{tr}(A)$. Dans la suite, on confond souvent une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. De ce fait, on note $\ker(A)$ le noyau de A et $\mathrm{Im}(A)$ son image.

L'objectif essentiel de ce problème est de caractériser les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices. Plus précisément, on se propose de montrer qu'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une comatrice si, et seulement si, $\mathrm{rg}(A) \in \{0, 1, n\}$. La preuve proposée dans cette épreuve est basée en grande partie sur les relations $(*)$ rappelées ci-dessus.

6/ Cas d'une matrice diagonalisable de rang 1

Soit A une matrice de rang 1 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

6.1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telles que $A = U \cdot {}^tV$.

6.2. En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)\,A$.

6.3. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est, en plus, diagonalisable.

6.4. Etablir l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $B = \alpha A$ soit un projecteur de rang 1.

6.5. Montrer que $C = I_n - {}^tB$ est un projecteur de rang $n-1$.

6.6. Montrer que $P_C(X) = (-1)^n X(X-1)^{n-1}$.

6.7. En déduire que $\mathrm{com}(C) = B$ (on pourra utiliser **5.5** et **5.7**).

6.8. En déduire que A est une comatrice.

7/ Cas d'une matrice non diagonalisable de rang 1

Soit A une matrice non diagonalisable de rang 1 dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

7.1. Montrer que $A^2 = 0$.

7.2. Soit $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (1,n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que que $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$.

7.3. Soit $C = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ avec

$$c_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (i,j) = (1,n) \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } 2 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $C^2 - C$, $C \cdot B$ et $B \cdot C$.

7.4. Quel est le rang de C?

7.5. On pose $D = M \cdot C \cdot M^{-1}$. Trouver le rang de D puis montrer que $A = D^2 - D$, $A \cdot D = D \cdot A = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2.

7.6. Etablir $D^3 = D^2$.

7.7. Montrer que $P_D(X) = X^2(1-X)^{n-2}$.

7.8. Déterminer $\mathrm{com}(D)$.

7.9. Montrer que A est une comatrice.

Fin de l'épreuve

5. The findings are especially good news, says Segura, because the star's 1985 flare was 1000 times as energetic as a similar flare on our own sun. So the fact that the model planet's atmosphere survived such a violent event may bode well for planets around similar young M dwarfs, she says. Mark Giampapa, an astronomer at the National Optical Astronomy Observatory in Tucson, Arizona, notes that most M dwarf stars are cooler than AD Leo is. Earth-like planets would have to orbit even closer to such stars and would thus suffer from stronger flare activity than the hypothetical planet in this study. In that case, he says, the planetary atmosphere may not go so **unscathed**.

Bruce Dorminey, *Science Magazine*, June 2010.

Clear handwriting and clean presentation of your paper are required.

Answer the questions in the provided spaces. Do not write your name on the answers sheet. Write your name on the en- tête sheet only. Return the filled exam sheet inside the en-tête sheet.

I. COMPREHENSION QUESTIONS (10 POINTS)

A/ Say whether the following statements are true or false. Justify your answer. (4.5 points)

1. The new research shows that planets susceptible of harbouring life are unsurprisingly vulnerable to solar activity.

.....

.....

2. According to astronomers, a star's longevity estimated to 40 billion years or more cannot allow reasonable time for life on orbiting earth-like planets to develop.

.....

.....

3. Astronomer Mark Giampapa thinks that the simulation to be reported in *Astrobiology* will undermine all previously stated dangers to which earth-like planets are said to be exposed.

.....

.....

B/ Rewrite using your own words the 2 underlined sentences in paragraph 2 in a way that conveys exactly the same meaning and length. (2 points)

.....

.....

C / Match words from the text in Column A with the corresponding definitions in Column B. There are 2 extra irrelevant definitions. (3.5 points)

Column A	Column B	Answers
1. scorching (title) 2. solar flare (P 1) 3. corona (P 2) 4. sear (P 3) 5. simulation (P 4) 6. shield (P 4) 7. unscathed (P 5)	a. wholly unharmed b. the imitative representation of the functioning of one system or process by means of the functioning of another c. a protective structure or screen d. a low-mass main sequence star e. the thin outermost part of the atmosphere of a star (as the sun) f. to burn at a sudden contact with intense heat g. the burning of a surface changing its color and texture h. disadvantageous and harmful i. a sudden temporary outburst of energy from a small area of the sun's surface	1. → ..... 2. → ..... 3. → ..... 4. → ..... 5. → ..... 6. → ..... 7. → .....

Ecole Normale Supérieure de Tunis	Epreuve : Anglais
Année Universitaire 2009-2010	Durée : 2 H
Concours d'entrée à l'Ecole Normale	Module : Langue
Juillet 2010	Sections : Math-Physique / Physique-Chimie

Earth-Like Planets May Be Shielded From Solar Scorching



Danger zone? The nearby M dwarf star Gliese 581 and some of its planets. A new study indicates that suns like this may not be as detrimental to habitable worlds as thought.

1. Many of our galaxy's suns have destroyed the atmospheres of orbiting Earth-like planets—or so astrobiologists have long feared. The Milky Way, they note, is dominated by M dwarf stars (also known as red dwarfs): violent, unpredictable suns that frequently hurl high-energy particles and **solar flares** into space. Because they are much cooler than our sun, any potentially habitable planet would need to orbit them much closer than Earth does, immediately putting it in the danger zone. But a new study indicates that these planets may be unexpectedly shielded from solar activity, keeping life safe.

2. M dwarfs make up at least 70% of the Milky Way's stars. Their masses range from roughly half to one-twentieth the mass of our sun, but what M dwarfs lack in size, they more than make up for in longevity. Astronomers estimate that these stars can burn for 40 billion to 100 billion years, giving any habitable planets plenty of time to evolve life. (The life span of our own sun, a G-class star, is about 10 billion years.) But during at least the first few billion years of their lives, M dwarfs also sport huge magnetic fields that routinely interact with their atmospheres to create coronal mass ejections—enormous explosions of matter from the star's highly ionized **corona**—and proton-rich flares.

3. To find out if this solar barbecue would **sear** any nearby habitable worlds, researchers led by astrobiologist Antigona Segura of the *Universidad Nacional Autónoma* de México (UNAM) in Mexico City simulated how a 1985 flare from AD Leonis (AD Leo), a young (less than 300 million years) old therefore very active M dwarf 16 light-years from Earth, would have affected a hypothetical Earth-like planet orbiting 0.16 astronomical units from the star. That's less than half Mercury's distance around the sun.

4. The **simulation**, to be reported in an upcoming issue of *Astrobiology*, indicates that when UV radiation from the star's upper atmosphere encountered the Earth-like atmosphere of our model planet, the energy resulted in a thicker ozone layer in the planetary atmosphere, providing a natural **shield** for the planetary surface. That's because the UV radiation actually split molecules of oxygen to create more ozone than it destroyed. "Throughout most of the flare, the surface of our model Earth-like planet experienced no more radiation than is typical on a sunny day here on Earth," astronomer Lucianne Walkowicz says.

II. LANGUAGE (10 POINTS)

A/ Fill each of the numbered blanks in the following passage with one suitable word from the box. (5 points)

for – as – same – to – of – by – make – those – an – all – some – that – of – off – by – in – to – deal – as – with

Many people persuade themselves that they cannot understand mechanical things, or that they have no head for figures. These convictions _____ (1) them feel enclosed and safe, and _____ (2) course save them a great _____ (3) of trouble. But the reader who has a head for anything at _____ (4) is pretty sure to have a head for whatever he really wants to put his mind _____ (5). His interest, say _____ (6) mathematics, has usually been killed _____ (7) routine teaching, in exactly the _____ (8) way that the literary interest of most scientists, and for _____ (9) matter of most non-scientists, has been killed by the set book and the Shakespeare play. Few people would argue that _____ (10) whose taste _____ (11) poetry has not survived _____ (12) examination syllabus are fundamentally insensitive _____ (13) poetry. Yet they cheerfully write _____ (14) the large intellectual pleasures of science _____ (15) if they belonged only to minds _____ (16) a special cast. Science is not a special sense. It is as wide as the literal meaning _____ (17) its name: knowledge. The notion of the specialised mind is, _____ (18) comparison, _____ (19) modern as the notion of the specialised man, 'the scientist', a word which is only _____ (20) hundred years old.

B/ Finish each of the following sentences in such a way that it means exactly the same as the sentence printed before. (5 points)

a. If you want my advice, I would forget about buying a new laptop. **(1.5 points)**

If I .....

b. Immediately after his arrival, things went wrong. **(2 points)**

No sooner ..... than .....

c. Arthur said he was sorry he had hurt your feelings. **(1.5 points)**

Arthur apologized .....

III. WRITING (10 POINTS)

Like many science-fiction writers, scientists also believe that since there are other galaxies apart from our own there must be other life. That will not simply imply that our planet is going to be invaded by aliens but most radically by a revolutionary new form of transport and a planetary commercial development of space. In a coherent essay, say whether or not you share this vision of man's relation to the outer-space in the future by considering the huge sums of money currently spent worldwide on space exploration.

UNIVERSITE DE TUNIS
ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure
Session 2010

Sections : Mathématiques-Physique et Physique-Chimie
Epreuve de Physique

Durée : 4 heures

Coefficient : 5

IMPORTANT :
L'épreuve comporte cinq pages. Il sera largement tenu compte de la présentation, de la rédaction, et du soin apporté à la copie. Les copies doivent être numérotées. L'usage de la calculatrice est autorisé. Les documents ne sont pas autorisés.

PROBLEME I

Données utiles :

- Le vide est caractérisé par sa permittivité électrique $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}\ \mathrm{Fm^{-1}}$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\ \mathrm{Hm^{-1}}$
- Pour un champ vectoriel $\vec{A}$, on rappelle que : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
- Une grandeur soulignée représente une fonction complexe dont la partie réelle est la grandeur physique associée.

Partie I

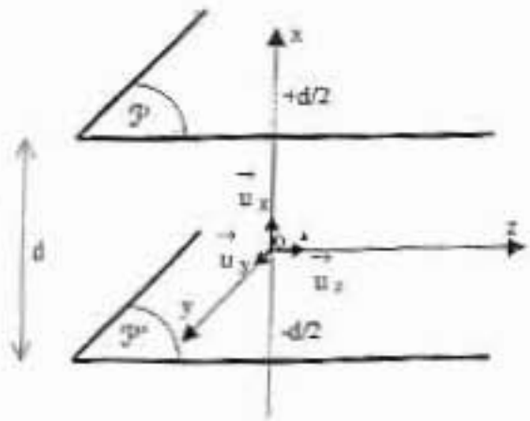
I-1. Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelles sont les valeurs des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ dans un tel conducteur ?
Que peut-on dire de la dissipation d'énergie dans un tel conducteur ?

I-2. On considère deux milieux voisins, séparés par une surface S, et ayant chacun la permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 du vide.

On désigne par $\vec{n}_{12}$ le vecteur unitaire normal à S en un point M_0, dirigé du milieu noté (1) vers le milieu noté (2), et par σ et $\vec{j}_s$ respectivement les densités surfaciques de charge et de courant au point M_0. Soient $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ les champs électriques et magnétiques dans les milieux (1) et (2) respectivement.
Ecrire les conditions aux limites sur ces champs au point M_0 de la surface S.
Que deviennent ces équations à l'interface vide (milieu (1)) – conducteur parfait (milieu (2)) ?

I-3. Donner les équations de Maxwell dans le vide dépourvu de charges et de courants et indiquer la signification physique de chacune d'elles.

I-4. En déduire les équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide. Quelle est la vitesse c de propagation de la lumière dans le vide illimité ? Calculer sa valeur numérique.



Partie II

On considère deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ parfaitement conducteurs, distants de d, perpendiculaires à l'axe Ox et symétriques par rapport au plan (yOz) d'un repère orthonormé direct R(Oxyz) de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On se propose d'étudier la propagation dans le vide qui règne entre ces deux plans, suivant la direction (Oz), d'une onde électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k_z \vec{u}_z$. Le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x) e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{u}_y$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

II-1. Etablir, à partir de l'équation de propagation du champ électrique $\underline{\vec{E}}$, l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x)$.

II-2. Quelles sont les conditions que doit vérifier le champ $\underline{\vec{E}}$ sur les plans $\mathscr{P}$ (x = d/2) et $\mathscr{P}'$ (x = - d/2). Montrer alors que la fonction $f(x)$ correspondant à l'onde qui se propage entre les deux plans, peut se mettre sous la forme : $f(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x)$

Exprimer α en fonction de ω, k_g et c.

II-3. En utilisant les conditions que doit satisfaire le champ $\underline{\vec{E}}$ sur les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, montrer qu'on trouve plusieurs modes de propagation possibles dont chacun est caractérisé par un nombre entier n (que l'on supposera positif).

Préciser les solutions pour n pair et pour n impair et décrire le type d'onde auquel on aboutit.

II-4. Exprimer k_g en fonction de ω, c, n et d. Le milieu est-il dispersif ?

II-5. Monter que pour chaque mode de propagation possible entre les deux plans, la pulsation ω doit être supérieure à une valeur ω_{cn} que l'on exprimera en fonction de n, d et c. La pulsation ω_{cn} est appelée pulsation de coupure.

II-6. Représenter la variation de l'amplitude du champ électrique $\underline{\vec{E}}$ de l'onde pour les trois premiers modes : n = 1, 2 et 3. On prendra : $A_1 = A_2 = E_0$.

II-7. Déterminer, pour chaque mode la vitesse de phase V_φ et la vitesse de groupe V_g. En déduire la relation qui lie ces deux vitesses.

II-8. Comparer V_φ et V_g à la vitesse c de la lumière dans le vide. Commenter ces résultats.

III. Dans la suite du problème, on s'intéressera uniquement à l'étude du mode fondamental (n = 1) pour lequel le champ électrique s'écrit :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \vec{u}_y .$$

III-1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ associé à $\underline{\vec{E}}(M,t)$. Est-il transversal ?

III-2. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ dans le temps.

III-3. Vue la structure de l'onde, peut-on prévoir le sens de $\langle \vec{R} \rangle$?

III-4. Calculer la puissance moyenne P_m traversant une surface Σ perpendiculaire à l'axe (Oz), limitée par les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ et de longueur l dans la direction (Oy).

III-5. Calculer la densité volumique u de l'énergie électromagnétique.

III-6. En déduire sa valeur moyenne dans le temps que l'on écrira sous la forme :

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left[1 + \left(1 - \frac{\omega_{c1}^2}{\omega^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right]$$

III-7. Calculer l'énergie électromagnétique δW_m contenue en moyenne dans une tranche du guide comprise entre z et z+dz et de section Σ (Σ est définie dans 2-*f*)

III-8. Sachant que l'énergie δW_m traverse Σ(z+dz) pendant l'intervalle de temps dt, déterminer la vitesse $\vec{V}_e$ de propagation de l'énergie moyenne et la comparer à la vitesse de groupe V_g.

PROBLEME II

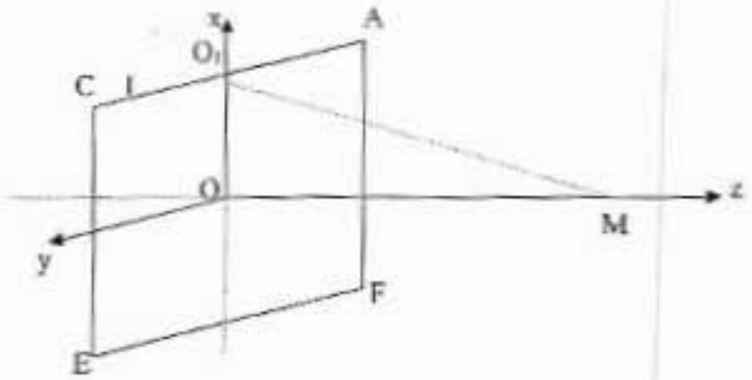
Partie I

I-1. Un segment conducteur AC de longueur 2a est parcouru, de A vers C, par un courant d'intensité I. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par ce segment en un point M de la médiatrice de AC et situé à une distance D du centre O_1 du segment AC, (O_1M=D).

I-2. On considère une spire conductrice carrée ACEF en assemblant quatre segments identiques à AC. Ce carré de centre O et d'axe Oz, est placé dans le plan xOy d'un trièdre orthonormé Oxyz, les côtés AC et EF sont parallèles à Oy. La spire est parcourue dans le sens ACEF, par un courant d'intensité I.

a- Donner l'expression des composantes du champ magnétique $\vec{B}_1(M)$ créé par le côté AC du carré au point M de l'axe 0z tel que OM = z.

b- Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par la spire carrée au point M. Donner son expression.



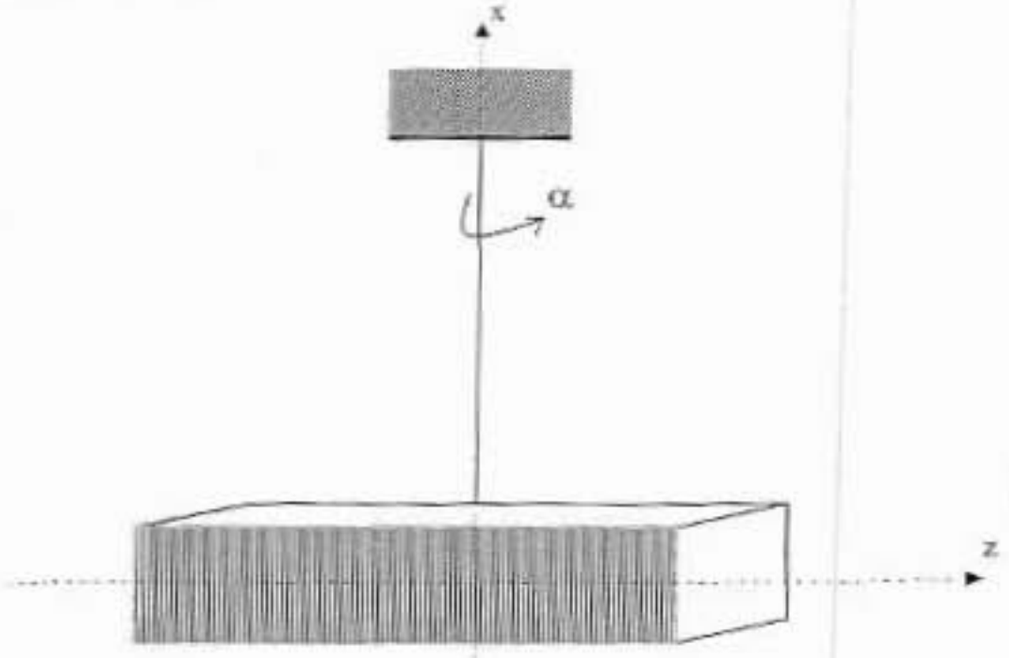
I-3. On considère un solénoïde de longueur indéfinie constitué de n spires jointives carrées (identiques à ACEF) par mètre d'axe z'z parcourues par un courant d'intensité I.

a- Donner l'allure des lignes de champ. Montrer que le solénoïde se comporte comme un barreau aimanté ayant un moment magnétique noté $\vec{M}$.

b- Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_S(M)$ créé par ce solénoïde en un point M de son axe. On peut utiliser la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2+2b^2}\left(u^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{2b^3}$$

I-4. Le solénoïde précédent est suspendu à l'aide d'un fil sans torsion parallèlement à l'axe Ox et accroché en son centre de façon à ce que son axe (Oz) soit horizontal dans une région de l'espace où règne un champ magnétique horizontal permanent $\vec{B}_0$



Quel est le mouvement du solénoïde ? quel sera sa position d'équilibre ? Justifier vos réponses.